- CAPITOLUL I -

PROBLEMA CELOR DOUĂ CORPURI

O reprezintă studiul mişcării relative a unui corp în jurul sau în vecinătatea Soarelui, singura acţiune exercitată fiind forţa de atracţie universală, exprimată prin legea lui Newton:

$$|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2| = f\,\frac{Mm}{r^2} \tag{1}$$

unde f (sau $\varkappa$) reprezintă constanta de atracţie.

1.1. LEGILE LUI KEPLER

In cadrul studiului de faţă nu vom lua în consideraţie atracţiile altor planete, care introduc perturbaţii sensibile la nivelul tehnicii actuale, întrucît chiar legile lui Kepler nu sînt decît aproximative, fiind valabile pentru un interval de timp destul de scurt.

Să reducem Soarele la un punct material S coincizînd cu centrul său de greutate unde să fie concentrată masa M; pentru corpul a cărui mişcare se studiază (planetă, asteroid, cometă) fie centrul de masă m notat cu P. Să mai considerăm un sistem de trei axe fixe: desemnăm prin X, Y, Z coordonatele lui S, prin X', Y', Z' cele ale lui P şi prin r distanţa dintre P şi S.

Ecuaţiile mişcării celor două puncte se scriu deci

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2X}{dt^2} + fm\,\dfrac{X-X'}{r^3} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2Y}{dt^2} + fm\,\dfrac{Y-Y'}{r^3} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2Z}{dt^2} + fm\,\dfrac{Z-Z'}{r^3} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2X'}{dt^2} + fM\,\dfrac{X'-X}{r^3} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2Y'}{dt^2} + fM\,\dfrac{Y'-Y}{r^3} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2Z'}{dt^2} + fM\,\dfrac{Z'-Z}{r^3} = 0 \end{cases}$$

Intrucît problema mişcării absolute nu se poate pune (aceasta avînd un pronunţat caracter filosofic), vom lua trei axe paralele cu primele şi avînd drept origine punctul S. Vom avea S(0,0,0) şi P(X'-X÷x,Y'-Y÷y,Z'-Z÷z) şi scăzînd ecuaţiile (2) două cîte două, căpătăm

$$(3)\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+f(M+m)\dfrac{x}{r^3}=0\ , \quad \dfrac{d^2y}{dt^2}+f(M+m)\dfrac{y}{r^3}=0\\ \dfrac{d^2z}{dt^2}+f(M+m)\dfrac{z}{r^3}=0\end{cases}$$

unde $r^2=d^2(P,S)=x^2+y^2+z^2$ cu noile notaţii.

Inmulţind ultima (3) cu y şi a doua cu -z şi adunînd, rezultă

$$y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}=0$$

de unde, integrînd şi repetînd combinaţiile analoage,

$$(4)\begin{cases}y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}=c\ , \quad z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}=c'\\ x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}=c''\end{cases}$$

care se numesc <u>integralele ariilor</u>, iar c,c' şi c" sînt nişte constante. Rezultă în continuare

$$(5)\qquad cx+c'y+c''z=0$$

care reprezintă ecuaţia unui plan, a cărui normală are cosinuşii directori proporţionali cu c,c' şi c".

Pe de altă parte, în general, în planul xy, aria unui triunghi de vîrfuri (x_i,y_i), $i=\overline{1,3}$ se poate scrie

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right|$$

deci dacă considerăm problema cînd unul din vîrfuri este originea S, iar celelalte Q(x,y) şi Q'(x',y'), dublul ariei acestui triunghi este

$$xy'-yx'$$

şi revenind la sistemul (4), expresia ultimă reprezintă deci derivata în raport cu timpul a dublului ariei pe care o mătură pe planul xy, proiecţia razei vectoare a planetei, şi este constantă, egală cu c". Am dedus, împreună cu (5),

<u>Legea II-a a lui Kepler :</u> Mişcarea unei planete se efectuează într-un plan trecînd prin centrul Soarelui, aşa încît aria măturată de raza vectoare variază proporţional cu timpul.

Dublul ariei măturate în unitatea de timp de raza vectoare se numeşte constanta ariilor relativă la planeta considerată. Se poate demonstra ([1], p.9) că această constantă este

$$C = \sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2} \; .$$

Fie α unghiul format de SP cu o direcţie fixă situată în planul orbitei, iar variaţia sa $d\alpha$ în intervalul dt (fig.1). Avem

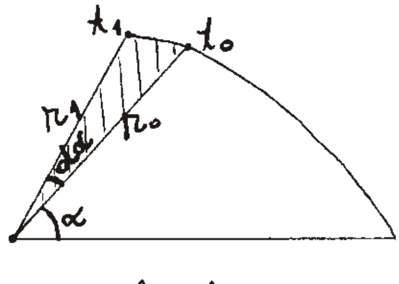

fig. 1

$$\mathcal{A}_{St_1t_0} \simeq r_0 \cdot r_1 \cdot \sin d\alpha$$

şi cum t_1 foarte apropiat de t_0, rezultă, punînd $r_0 = r_1 = r$,

$$2\mathcal{A} = r^2 \cdot d\alpha = C \cdot dt \; ,$$

de unde

$$(6) \qquad r^2 \frac{d\alpha}{dt} = C \; .$$

Pentru a studia forma traiectoriei, trebuie să integrăm (3). Dacă înmulţim cele trei ecuaţii prin $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ şi $\frac{dz}{dt}$ şi dacă adunăm ecuaţiile, se formează o combinaţie care integrată, conduce la integrala forţelor vii, adică

$$(7) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2f\mu}{r} + h$$

unde h este constanta de integrare, iar $\mu = M+m$. Primul membru din (7) reprezintă pătratul vitezei lui P; pe de altă parte, dacă se dă poziţia acestui punct prin coordonatele polare r şi α, viteza descompunîndu-se în două componente rectangulare $\frac{dr}{dt}$ şi $r\frac{d\alpha}{dt}$, ecuaţia (7) devine

$$(7') \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{2f\mu}{r} + h \; .$$

Eliminînd dt între ecuaţiile (6) şi (7'), avem ecuaţia diferenţială a traiectoriei

$$C^2 \frac{dr^2 + r^2 d\alpha^2}{r^4 d\alpha^2} = \frac{2f\mu}{r} + h \; ,$$

care se scrie după un mic calcul ([1], p.10),

$$d\alpha = \frac{d\left(\frac{C}{r} - \frac{f\mu}{C}\right)}{\sqrt{h + \frac{f^2\mu^2}{C^2} - \left(\frac{C}{r} - \frac{f\mu}{C}\right)^2}}$$

care integrată, dacă notăm cu ω constanta de integrare, dă

$$\alpha - \omega = \arccos \frac{\frac{C}{r} - \frac{f\mu}{C}}{\sqrt{h + \frac{f^2\mu^2}{C^2}}} \iff \frac{C}{r} = \frac{f\mu}{C} + \sqrt{h + \frac{f^2\mu^2}{C^2}} \cos(\alpha - \omega) \; ,$$

$$(8)\qquad r = \frac{\frac{C^2}{f\mu}}{1+\sqrt{1+h\frac{C^2}{f^2\mu^2}}\cos(\alpha-\omega)}$$

Pe de altă parte,din geometrie se ştie că ecuaţia în coordonate polare r şi v a unei conice,dacă se ia drept axă polară direcţia de la focar la vîrful axei mari cel mai apropiat de focar,se prezintă sub forma

$$(8')\qquad r = \frac{p}{1+e\cos v}$$

care se poate identifica cu (8).

Printre cele trei genuri de conice,elipsa este singura curbă închisă;cum planetele fac parte din sistemul solar,rezultă

<u>Legea I a lui Kepler :</u> Planetele descriu,în mişcarea lor relativă în jurul Soarelui,elipse,avînd unul din focare în Soare.

Revenind la (8)şi (8'),rezultă

$$(9)\qquad e = \sqrt{1+\frac{hC^2}{f^2\mu^2}}$$

de unde avem următoarele trei cazuri:

$$(\ast)\quad \begin{cases} h<0\ ,\ e<1 & \text{-traiectoria este o elipsă} \\ h=0\ ,\ e=1 & \text{- o parabolă} \\ h>0\ ,\ e>1 & \text{- o hiperbolă ;} \end{cases}$$

tot din (8)şi (8'),mai rezultă

$$(10)\qquad C^2 = f\mu p$$

p fiind parametrul curbei;şi avem din Geometrie

$$(\ast\ast)\quad \begin{cases} p=a(1-e^2) & \text{-elipsă;a-semiaxa mare} \\ p=a_1(e^2-1) & \text{-hiperbolă;}a_1\text{-semiaxa transversă} \\ p=2q & \text{-parabolă;q-dist(focar,vîrf)} \end{cases}$$

Pentru deducerea ultimei legi a lui Kepler se aproximează M+m cu M şi se consideră cazul orbitei eliptice:constanta ariilor C este atunci dublul raportului ariei elipsei faţă de timpul U necesar planetei pentru o revoluţie completă.

Deducem

$$C = \frac{2\pi ab}{U} = \frac{2\pi}{U}\,a^2\sqrt{1-e^2}$$

Cantitatea $\frac{2\pi}{U} \doteq n$ se numeşte <u>mişcare medie a planetei</u> , şi ţinînd seama de (10),ultima relaţie furnizează

(10') $n^2a^3 = f\mu$ =constant

dacă presupunem M $\cong$ M+m =μ , ceea ce demonstrează

Legea a III-a a lui Kepler : Pătratele duratelor de revoluţie ale planetelor sînt proporţionale cu cuburile axelor mari ale orbitelor lor.

Mai adăugăm că din (9) şi (10) se mai deduce

([redacted]) $\begin{cases} h = -\dfrac{f\mu}{a} & \text{pentru orbita eliptică} \\ h = 0 & \text{pentru cea parabolică} \\ h = \dfrac{f\mu}{a_1} & \text{pentru orbita hiperbolică.} \end{cases}$

1.2. UNITĂŢI DE DISTANŢĂ,TIMP ŞI MASĂ

Gauss a propus,pentru calculul orbitelor planetelor,alegerea următoarelor unităţi :

Unitate de lungime,distanţa medie Pămînt-Soare;

Unitate de timp,durata zilei solare medii;

Unitate de masă,masa Soarelui.

Deci,dacă ţinem cont că a=1 pentru Pămînt; M=1 şi n=$\frac{2\pi}{U}$cu U-anul tropic,din (10') rezultă

$\frac{4\pi^2}{U^2} = f(1+m)$ cu m-masa Pămîntului.

Din considerente istorice se renotează

(12) $f \doteq k^2 = \frac{4\pi^2}{U^2} \cdot \frac{1}{1+m}$

unde k = 0,01720209895 - constanta lui Gauss.

Mai notăm că ecuaţiile (3) devin cu considerentele făcute,

(12') $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2x}{r^3} = 0 \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2y}{r^3} = 0 \quad , \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k^2z}{r^3} = 0$

a căror nouă formă foarte comodă explică alegerea unităţilor de măsură.

1.3. MIŞCAREA ELIPTICĂ

Faptul că elipsa poate fi considerată ca proiecţia pe un plan a unui cerc ne permite să scriem ecuaţiile de mişcare într-o formă finită,adică fără a integra ecuaţia ariilor.

Să considerăm figura 2 şi elipsa descrisă de o planetă în mişcarea sa heliocentrică şi ΠA axa mare.Fie P poziţia planetei pe elipsă şi S-Soarele aflat într-un focar. Construim planul cercului care se va proiecta pe elipsă şi notăm cu φ-unghiul dintre cele două plane.

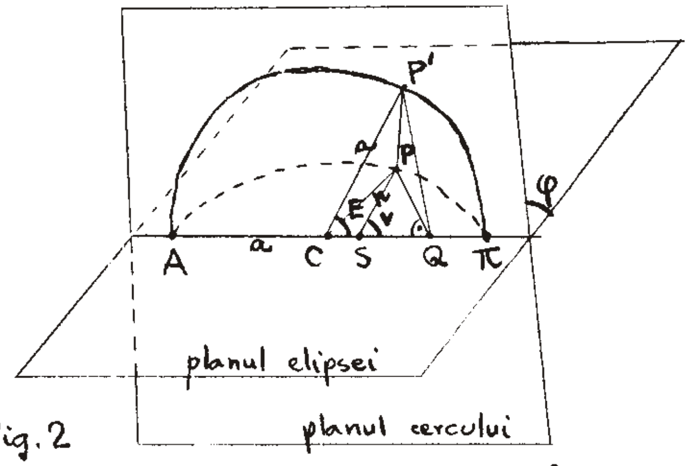

fig. 2

Se notează $v \doteq \widehat{\pi S P}$ = anomalia adevărată şi E(sau u) $\doteq \widehat{\pi C P'}$ = anomalia excentrică a planetei, unde P' este punctul de pe cerc care se va proiecta în P. Dacă SP = r - raza vectoare a planetei şi dacă Q este piciorul perpendicularei din P pe $A\pi$, putem scrie:

$$(13)\begin{cases} r\cos v = a(\cos E - e) \\ r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E \end{cases} \quad \text{(v.[4] sau [5])}$$

Ridicînd la pătrat şi adunînd, rezultă ecuaţia polară a mişcării planetei pe elipsă :

$$(14) \qquad r = a(1 - e\cos E)$$

Eliminînd pe E în (13), se poate găsi în mod simplu şi expresia razei vectoare funcţie de anomalia adevărată, conform [5] p.142

$$(15) \qquad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$$

In sfîrşit, pentru a găsi expresia anomaliei adevărate funcţie de cea excentrică, din (14) şi prima din (13), se obţine prin adunare şi scădere:

$$(15') \qquad \begin{aligned} r(1+\cos v) &= a(1-e)(1+\cos E) \\ r(1-\cos v) &= a(1+e)(1-\cos E) \end{aligned}$$

sau încă, după o transformare simplă şi împărţind,

$$(16) \qquad \operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}.$$

1.4. ECUATIA LUI KEPLER

Cantitatea $M \doteq n(t-T) = \frac{2\pi}{U}(t-T)$ se numeşte anomalie medie la momentul t, unde T-momentul trecerii planetei prin π-periheliu. Din figura 2 se vede că aria sectorului eliptic $SP\pi$ este proiecţia ortogonală pe planul E al elipsei a ariei $SP'\pi$. Rezultă

$$\mathcal{A}(SP\pi) = \frac{b}{a}\cdot\mathcal{A}(SP'\pi) = \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}a^2E - \frac{1}{2}ea^2\sin E\right]$$

Pe de altă parte, după Legea II-a,

$$\mathcal{A}(SP\pi) = \frac{C}{2}(t-T) = \frac{\pi a b}{U}(t-T)$$

Egalînd ultimele două expresii,rezultă

$$(17) \quad E - e\sin E = n(t-T) = M$$

care se numeşte <u>ecuaţia lui Kepler,</u>a cărei rezolvare se poate face după mai multe metode:

a) Pentru metoda clasică,recomandăm [5] p.143,unde se arată că funcţia $\varphi(E)=E-e\cdot\sin E-M$ are o singură rădăcină în intervalul considerat şi unde se demonstrează convergenţa metodei pe un caz chiar mai general,anume pentru ecuaţia $E=f(E)$ unde f funcţie continuă şi derivabilă.

b) O metodă mai veche constă în folosirea tabelelor cu dublă variabilă pentru e şi M (Bauschinger,nr.X,în "Tafeln zur theorischen Astronomie";Astrand,Leipzig,1890,sau"Tables for the true anomaly in elliptic orbits,de Schlesinger şi Udick"-Allegheny Observatory,vol II,nr.17).

c) O metodă grafică simplă:
Fie graficul y= sin x ;să luăm (fig.3)pe axa Ox segmentul OP=M măsurat în radiani şi din P să ducem dreapta PN,înclinată pe axa Ox cu unghiul α a.i.$\mathrm{cotg}\,\alpha$ =e.

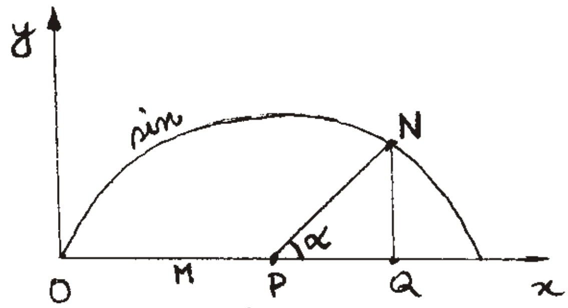

fig. 3

Atunci abscisa lui N,adică distanţa OQ măsoară necunoscuta E. Pentru demonstraţie,e suficient să observăm că dacă OQ=E,în $\triangle$NPQ am avea $NQ=\sin E$,$PQ=NQ\cdot\mathrm{cotg}\,\alpha=e\cdot\sin E$ deci $OP=OQ-PQ=E-e\sin E$.

d) Encke a dat o metodă pe care Herz a modificat-o apoi uşor, care foloseşte schimbarea $E-M=x$ şi ecuaţia (17) devine $x=e\sin(M+x)$ după care înlocuieşte sin x şicos x prin dezvoltările în serie ([1] ,p.21).

e) Pentru alte cîteva metode numerice recomandăm articolul lui Pál şi al lui Pârv din [11] p.115.

1.5. MIŞCAREA PARABOLICĂ

Ecuaţia (8') devine cu reducerea (*),

(17') $$r = \frac{p}{1+\cos v} = \frac{p}{2\cos^2\frac{v}{2}}$$

şi din (6), unde $\alpha = v$ (anomalia adevărată) şi (10), aproximînd $\sqrt{\mu}$ cu 1 (cu unităţile alese de Gauss), avem

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k\sqrt{p}$$

de unde, folosind expresia lui r rezultă

$$\frac{dv}{4\cos^4\frac{v}{2}} = \frac{k\,dt}{p^{3/2}} \quad \text{sau}$$

$$\frac{1}{\cos^2\frac{v}{2}} \cdot \frac{dv}{2\cos^2\frac{v}{2}} = \frac{2k\,dt}{p^{3/2}} \quad \text{sau încă}$$

$$\left(1+tg^2\frac{v}{2}\right) d\left(tg\frac{v}{2}\right) = \frac{2k\,dt}{p^{3/2}}.$$

Sub această formă ecuaţia se poate integra imediat şi, folosind (**) p=2q, rezultă

(18) $$tg\frac{v}{2} + \frac{1}{3}tg^3\frac{v}{2} = \frac{k}{\sqrt{2}\,q^{3/2}}(t-T)$$

cu T-epoca trecerii astrului la periheliu (constanta de integrare este $\frac{-kT}{\sqrt{2}\,q^{3/2}}$ din condiţia iniţială v=0, t=T).

Pentru rezolvarea ecuaţiei (18) se poate apela fie la tabele (Oppolzer sau Bauschinger), care însă au dezavantajul că pentru $v \to \pi$ membrul stîng devine foarte mare şi interpolarea devine imposibilă, ceea ce necesită punerea ecuaţiei sub

$$\frac{8}{3\sin^3 v} \cdot \frac{1+3\,cotg^2\frac{v}{2}}{\left(1+cotg^2\frac{v}{2}\right)^3} = \frac{k(t-T)}{\sqrt{2}\,q^{3/2}}$$

unde factorul secund din primul membru tinde la 1 cînd $v \to \pi$, sau se poate apela la metoda transformării ecuaţiei de gradul 3 în $tg\frac{v}{2}$ într-una de gradul 2, ca în [1], p.27.

1.6. MIŞCAREA HIPERBOLICĂ

Dă vreme ce ecuaţia hiperbolei are, în coordonate polare, aceeaşi formă cu cea a elipsei, se poate, dpdv analitic, deduce studiul mişcării hiperbolice din cel al mişcării eliptice, schimbînd semnul lui 1-e şi al lui a; vom fi însă conduşi la a introduce cantităţi imaginare.

O altă variantă, pentru a evita consideraţiile de mai sus, este posibilă făcînd apel la funcţiile sh şi ch şi care are avantajul că formulele finale sînt de o analogie remarcabilă cu cele ale mişcării eliptice.

O a treia metodă, constă în integrarea independentă a ecuaţiei ariilor, faţă de cazul eliptic. Prin analogie cu (16),

(19) $\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\operatorname{tg}\frac{N}{2}$

de unde, diferenţiind, rezultă

(20) $\frac{dv}{\cos^2\frac{v}{2}} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \cdot \frac{dN}{\cos^2\frac{N}{2}}$.

Dar avem

$$\frac{1}{\cos^2\frac{v}{2}} = 1+\operatorname{tg}^2\frac{v}{2} = 1+\frac{e+1}{e-1}\operatorname{tg}^2\frac{N}{2} = \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{N}{2}\right)\frac{e-\cos N}{e-1} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\frac{N}{2}} \cdot \frac{e-\cos N}{e-1} .$$

Din (20), avem că

(21) $dv = \sqrt{e^2-1} \cdot \frac{dN}{e-\cos N}$;

se obţine apoi

$$\cos v = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}} = \frac{e-1-(e+1)\operatorname{tg}^2\frac{N}{2}}{e-1+(e+1)\operatorname{tg}^2\frac{N}{2}}$$

Dacă în ultima expresie se grupează şi se dă factor comun forţat $1+\operatorname{tg}^2\frac{N}{2}$, rezultă

$$\cos v = \frac{e\cos N-1}{e-\cos N}$$

şi, în consecinţă,

$1+e\cos v = \frac{(e^2-1)\cos N}{e-\cos N}$ deci

(22) $r = \frac{p}{1+e\cos v} = \frac{p(e-\cos N)}{(e^2-1)\cos N}$.

Ecuaţia ariei, scrisă la fel ca în 1.5.,

$$r^2\frac{dv}{dt} = k\sqrt{p}$$

devine atunci, ţinînd seama de (21):

$$k\sqrt{p}\,dt = \frac{p^2}{(e^2-1)^{3/2}} \cdot \frac{e-\cos N}{\cos^2 N} \cdot dN$$

Tinînd seama de (**), avem $p=a_1(e^2-1)$ şi integrăm,

(23) $\frac{k(t-T)}{a_1^{3/2}} = e\operatorname{tg}N - \int_0^N\frac{dN}{\cos N} = e\operatorname{tg}N - \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{N}{2}\right)$

Indicăm transformarea dată de Gauss; fie

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{N}{2}\right) \doteq \alpha ,$$

de unde

(23') $\operatorname{tg}\frac{N}{2} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$, $\cos N = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$, $\operatorname{tg}N = \frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)$

Ecuaţia (23) devine

(24) $\frac{k(t-T)}{a_1^{3/2}} = \frac{e}{2}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right) - \ln\alpha$

Pe de altă parte, din (22), găsim

$$r = a_1\left(\frac{e}{\cos N} - 1\right) = a_1 \cdot \frac{e}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - a_1 \qquad \text{şi}$$

$$(24^0) \qquad r\cos v = a_1\left(\frac{e}{\cos N} - 1\right)\frac{e\cos N - 1}{e - \cos N} = a_1 e - \frac{a_1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

Prin acelaşi procedeu al adunării şi scăderii ultimelor două relaţii ca şi în cazul eliptic,obţinem

$$(24') \qquad \begin{cases} \sqrt{r}\cos\frac{v}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a_1(e-1)}\left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \\ \sqrt{r}\sin\frac{v}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a_1(e+1)}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}\right) \end{cases}$$

adică

$$(25) \qquad tg\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \cdot \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \cdot \frac{1 - tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{N}{2}\right)}{1 + tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{N}{2}\right)}$$

omoloaga lui (16) în cazul eliptic.