-CAPITOLUL III-

CALCULUL ELEMENTELOR ORBITEI CU AJUTORUL DATELOR HELIOCENTRICE

Are o importanţă directă în aplicarea metodelor Laplace şi Gauss pentru determinarea de orbite din capitolul următor.

3.1. DETERMINAREA ELEMENTELOR, DACĂ SE CUNOSC POZIŢIA SI VITEZA INIŢIALĂ A ASTRULUI

Integrala forţelor vii (7) din 1.1. devine cu([redacted]) în caz eliptic

$$(1)\qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = k^2\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

iar în caz hiperbolic a se înlocuieşte cu $-a_1$.

Pe de altă parte, ecuaţiile de mişcare (12')din 1.2. şi integralele ariilor (4)1.1. ne permit să exprimăm combinaţia

$$c''\frac{d^2y}{dt^2}-c'\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k^2y}{r^3}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+\frac{k^2z}{r^3}\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)$$

$$= k^2\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\frac{dx}{dt}-\frac{k^2x}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)$$

Dar, dacă (x,y,z) sînt coordonatele astrului în sistem heliocentric şi r este distanţa de la astru la Soare, avem

$$x^2+y^2+z^2=r^2\,,\qquad x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}=r\frac{dr}{dt}$$

Rezultă deci

$$c''\frac{d^2y}{dt^2}-c'\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{k^2}{r}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{k^2x}{r^2}\cdot\frac{dr}{dt}\,;$$

membrul stîng este derivata lui $k^2\frac{x}{r}$; integrînd, se obţine

$$k^2\frac{x}{r}-c''\frac{dy}{dt}+c'\frac{dz}{dt} = \text{constant}$$

ceea ce constituie integrala lui Laplace; cînd se înlocuieşte c' şi c" cu expresiile lor din integralele ariilor, se poate scrie

$$c'\frac{dz}{dt}-c''\frac{dy}{dt} = \left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)\frac{dz}{dt}-\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\frac{dy}{dt} =$$

$$= \frac{dx}{dt}\,r\,\frac{dr}{dt}-x\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right];$$

de unde, ţinînd cont de ecuaţia (1),

$$c'\frac{dz}{dt}-c''\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}-k^2x\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

Permutînd coordonatele şi desemnînd prin F, F' şi F" cele trei constante, rezultă

$$(2)\quad \begin{cases} F = r\dfrac{dr}{dt}\cdot\dfrac{dx}{dt} - k^2x\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{a}\right) \\ F' = r\dfrac{dr}{dt}\cdot\dfrac{dy}{dt} - k^2y\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{a}\right) \\ F'' = r\dfrac{dr}{dt}\cdot\dfrac{dz}{dt} - k^2z\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{a}\right) \end{cases}$$

Ecuaţiile de mişcare (1)şi (2) aplicate momentului t_0,furnizează valorile constantelor :

$$(2')\quad y_0\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 - z_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = c$$;analog c' şi c",

apoi

$$(2'')\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_0^2 = k^2\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right),$$

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

Pentru calculul constantelor F,F' şi F" ,se calculează mai întîi

$$\left(r\frac{dr}{dt}\right)_0 = x_0\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 + y_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + z_0\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$$

apoi se aplică relaţiile (2) la momentul t_0.

Trebuie acum să determinăm orbita,fiind date constantele c,c', c",F,F',F";sau,în alţi termeni,să formăm relaţii care leagă aceste constante de elemente,unul din ele,a,fiind deja cunoscut.Să alegem planul xy drept cel al eclipticii,axa Ox fiind dirijată spre punctul ♈.Se poate arăta că segmentul OC de lungime C (constanta ariilor),ale cărui proiecţii pe cele trei axe sînt c,c',c",are drept lungime $k\sqrt{p}$ şi o direcţie perpendiculară pe planul orbitei Segmentul OC face deci cu axa Oz un unghi egal cu i ;o reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare dă faptul că proiecţia lui OC pe Oxy,notată cu OD,face cu ON(linia nodurilor)un unghi drept (figura 5).

Prin urmare,proiectînd OC pe cele trei axe,găsim

$$(3)\quad \begin{cases} c = k\sqrt{p}\,\sin i\,\sin\Omega \\ c' = -k\sqrt{p}\,\sin i\,\cos\Omega \\ c'' = k\sqrt{p}\,\cos i \end{cases}$$

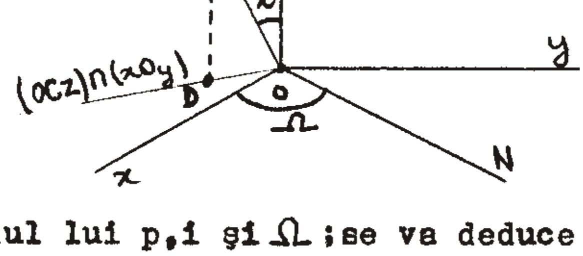


fig.5

Aceste formule ne permit calculul lui p,i şi Ω ;se va deduce e din (xx)1.1.funcţie de tipul traiectoriei.Nu rămîne de calculat decît epoca T a pasajului la periheliu;vom începe prin calculul lui v_0(anomalia adevărată la momentul t_0);dacă $u=\omega+v$ argumentul de latitudine,folosind (1)2.2.,alcătuim combinaţiile

$$x_0\cos\Omega+y_0\sin\Omega = r_0\cos u_0 = r_0\cos(\omega+v_0)$$

$$(3')\qquad -\frac{x_0\sin\Omega-y_0\cos\Omega}{\cos i} = r_0\sin(v_0+\omega) = r_0\sin u_0 = \frac{z_0}{\sin i}$$

Urmează calculul lui E şi apoi al lui T;după formulele corespunzătoare tipului de orbită.

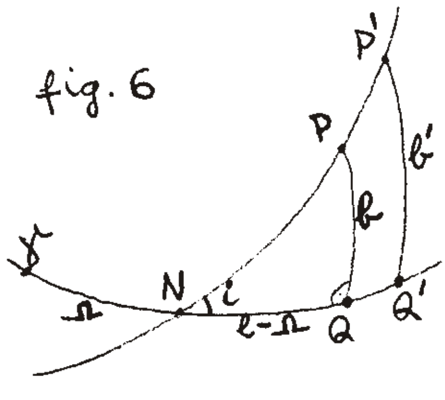
3.2. DETERMINAREA ELEMENTELOR,CUNOSCÎND DOUĂ POZIŢII HELIOCENTRICE;POZIŢIA PLANULUI ORBITEI,ARGUMENTUL LATITUDINII

Să desenăm în figura 6 două poziţii ale astrului,P şi P' la momentele t şi t',avînd razele heliocentrice r şi r',adică coordonatele (ℓ,b) şi (ℓ',b') ecliptice ale acestor direcţii.Fie Q şi Q' intersecţiile cercurilor mari duse prin P şi P',respectiv, cu ecliptica.

Presupunem că epoca t' este posterioară lui t. Dacă $\ell'>\ell$,mişcarea este directă şi $i<90^0$;dacă $\ell'<\ell$,mişcarea este retrogradă;avem deci

$$\ell'>\ell\ ,\ \operatorname{tg} i>0$$
$$\ell'<\ell\ ,\ \operatorname{tg} i<0$$

fig. 6



In triunghiurile sferice PQN şi P'Q'N avem,de exemplu împărţind formula cu 5 elemente,membru cu membru,la teorema sinusurilor :

$$\operatorname{tg} b = \sin(\ell-\Omega)\operatorname{tg} i$$
$$\operatorname{tg} b' = \sin(\ell'-\Omega)\operatorname{tg} i$$

Adunînd şi scăzînd membru cu membru,rezultă

$$(4)\begin{cases}\operatorname{tg} i\sin\left(\frac{\ell+\ell'}{2}-\Omega\right) = \dfrac{\sin(b+b')}{2\cos b\cos b'\cos\frac{\ell'-\ell}{2}}\\[2ex] \operatorname{tg} i\cos\left(\frac{\ell+\ell'}{2}-\Omega\right) = \dfrac{\sin(b'-b)}{2\cos b\cos b'\sin\frac{\ell'-\ell}{2}}\end{cases}$$

ceea ce determină unghiurile i şi Ω.

In aceleaşi triunghiuri,avem de asemenea,prin acelaşi procedeu, dar schimbînd două unghiuri :

$$(5) \qquad \mathrm{tg}\, u = \frac{\mathrm{tg}(l-\Omega)}{\cos i} \quad , \quad \mathrm{tg}\, u' = \frac{\mathrm{tg}(l'-\Omega)}{\cos i}$$

iar teorema sinusurilor dă

$$\sin b = \sin u \sin i \quad , \quad \sin b' = \sin u' \sin i$$

ceea ce permite determinarea exactă a lui u şi a lui u'.

3.3. CALCULUL ELEMENTELOR ORBITEI ELIPTICE ÎN PLANUL EI

Necunoscutele sînt a,e, ω şi M_0 şi plecăm de la următoarele formule ce rezultă imediat din (15')1.3.:

$$(6) \begin{cases} \sqrt{r} \sin \frac{v}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E}{2} \\ \sqrt{r} \cos \frac{v}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E}{2} \\ \sqrt{r'} \sin \frac{v'}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E'}{2} \\ \sqrt{r'} \cos \frac{v'}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E'}{2} \end{cases} ;$$

şi din primul capitol,mai avem de asemenea :

$$(7) \begin{cases} r = a(1-e\cos E) \quad , \quad r' = a(1-e\cos E') \\ M = E - e\sin E = \mu t + M_0 \quad , \quad M' = E' - e\sin E' = \mu t' + M_0 \end{cases}$$

Ultimele două relaţii dau

$$(8) \qquad M_0 = \frac{M+M'}{2} - \mu \frac{t+t'}{2}$$

şi combinaţii simple cu (6) şi (7) implică

$$(8') \begin{cases} \sqrt{rr'} \cos \frac{v'-v}{2} = a(1-e)\cos\frac{E}{2}\cos\frac{E'}{2} + a(1+e)\sin\frac{E}{2}\sin\frac{E'}{2} \\ r + r' = 2a - ae(\cos E + \cos E') \\ M' - M = \mu(t'-t) = E' - E - e(\sin E' - \sin E) \end{cases}$$

Cantitatea $\frac{v'-v}{2} \doteqdot f$ este aceeaşi cu $\frac{u'-u}{2}$ deci este cunoscută.

Punînd

$$(9) \qquad \frac{E'-E}{2} \doteqdot g \quad , \quad \frac{E'+E}{2} \doteqdot G \quad , \quad k(t'-t) \doteqdot \theta$$

şi înlocuind μ prin $\frac{k}{a^{3/2}}$,obţinem din (8'):

$$(10) \begin{cases} \sqrt{rr'} \cos f = a(\cos g - e\cos G) \\ r + r' = 2a - 2a\cos g \cdot e\cos G \\ \frac{\theta}{a^{3/2}} = 2g - 2\sin g \cdot e\cos G \end{cases}$$

care ecuaţii conţin doar necunoscutele a,g,şi $e\cdot\cos G$.

Dpdv al calculului efectiv,există avantajul de a lua pe g drept necunoscută principală deoarece intră într-o combinaţie transcendentă. Primele două ecuații dau :

$$(10')\quad \begin{aligned} e\cos G &= \cos g - \frac{1}{a}\sqrt{rr'}\cos f\ ; \\ a\sin^2 g &= \frac{r+r'}{2} - \sqrt{rr'}\cos f\cos g \end{aligned}$$

Introducem l prin

$$(11)\quad 1+2l \div \frac{r+r'}{2\sqrt{rr'}\cos f}$$

deci

$$(12)\quad a\sin^2 g = 2\sqrt{rr'}\cos f\left(l+\sin^2\frac{g}{2}\right)$$

Ducînd $e\cdot\cos G$ din (10') în a treia ecuație (10), rezultă

$$\frac{\theta}{a^{3/2}} = 2g - \sin 2g + 2\sin g\,\frac{\sqrt{rr'}\cos f}{a}$$

Inlocuim a prin expresia (12) și punem

$$(13)\quad m \div \frac{\theta}{\left(2\sqrt{rr'}\cos f\right)^{3/2}}$$

Găsim

$$(14)\quad m = \left(l+\sin^2\frac{g}{2}\right)^{1/2} + \left(l+\sin^2\frac{g}{2}\right)^{3/2}\cdot\frac{2g-\sin 2g}{\sin^3 g}$$

aici 2g de la ultimul numărător este în radiani.

Trebuie rezolvată ecuația (14), care conține doar necunoscuta g; punem, după Gauss

$$(15)\quad \sqrt[4]{\frac{r'}{r}} \div \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\chi\right)$$

și relația (11) devine

$$1+2l = \frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\chi\right)+\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\chi\right)}{2\cos f}$$

De aici, se poate arăta reducînd la $\operatorname{tg}\chi$, că

$$(16)\quad l = \frac{\operatorname{tg}^2 2\chi + \sin^2\frac{f}{2}}{\cos f}$$

Revenind la ecuația (14), și făcînd

$$(17)\quad \begin{aligned} x &\div \sin^2\frac{g}{2} \\ X &\div \frac{2g-\sin 2g}{\sin^3 g} \end{aligned}$$

ea devine

$$(18)\quad m = (l+x)^{1/2} + (l+x)^{3/2}\cdot X$$

Funcția X, după (17), este dezvoltabilă în serie de puteri ale lui g, adică ale lui x ; avem

$$X\sin^3 g = 2g - \sin 2g$$

care dă

$$\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dx}{dg}\cdot\sin^3 g+3X\sin^2 g\cos g-2+2\cos 2g=0 \Rightarrow$$

$$\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dx}{dg}\sin g+3X\cos g-4=0\ ;$$

din (17) avem şi

$$\frac{dx}{dg}=\frac{1}{2}\sin g$$

deci,eliminînd g în ultimele două,rezultă

$$(19)\qquad 2x(1-x)\frac{dX}{dx}+(3-6x)X-4=0$$

Prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi,fie

$$X=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\dots$$

şi calculăm $\frac{dX}{dx}$ din (19)şi din cea de deasupra;găsim

$$X=\frac{4}{3}+\frac{4\cdot 6}{3\cdot 5}x+\frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7}x^2+\dots$$

Gauss a găsit pentru X o dezvoltare în fracţii continue;dacă, prin aceeaşi metodă calculăm dezvoltarea lui $\frac{1}{X}$,găsim

$$\frac{1}{X}=\frac{3}{4}-\frac{9}{10}x+\frac{9}{175}x^2+\frac{26}{875}x^3+\dots$$

coeficienţii fiind descrescători;se pune

$$(20)\qquad \xi\doteq\frac{2}{35}x^2\left(1+\frac{26}{45}x+\dots\right)$$

de unde

$$(21)\qquad X=\frac{1}{\frac{3}{4}-\frac{9}{10}(x-\xi)}$$

Vom transforma încă ecuaţia (18),punînd

$$(22)\qquad l+x\doteq\frac{m^2}{y^2}$$

Rezultă,succesiv :

$$y^3-y^2=m^2X=\frac{m^2}{\frac{3}{4}+\frac{9}{10}(l+\xi)-\frac{9}{10}\cdot\frac{m^2}{y^2}},$$

$$(y^3-y^2)\left[\frac{3}{4}+\frac{9}{10}(l+\xi)\right]=\frac{9}{10}m^2\left(y+\frac{1}{9}\right)$$

şi,în sfîrşit

$$(23)\qquad y^3-y^2-hy-\frac{h}{9}=0,$$

h fiind definit prin

$$(24)\qquad h\doteq\frac{m^2}{\frac{5}{6}+l+\xi}>0$$

Ecuaţia (23) are o singură rădăcină pozitivă şi se scrie

$$(24^0)\qquad y-1=\frac{h\left(y+\frac{1}{9}\right)}{y^2}$$

găsindu-se $y>0$ prin aproximaţii succesive,punînd în primă instanţă,de exemplu y=1.

După ce am calculat x, formula (12) dă, cu $\frac{m^2}{y^2} = l + \sin^2\frac{g}{2}$:

$$a \sin^2 g = \frac{2m^2}{y^2}\sqrt{rr'}\cos f$$

şi înlocuind pe m cu expresia sa (13), rezultă

$$(24') \qquad a = \frac{\theta^2}{4rr'y^2\sin^2 g\cos^2 f}$$

Pentru a obţine pe p, din ecuaţiile (6) se deduce

$$\sqrt{rr'}\sin\frac{v'-v}{2} = \sqrt{a^2(1-e^2)}\sin\frac{E'-E}{2}$$

sau, după notaţiile introduse, şi cu $p = a(1-e^2)$,

$$\sqrt{rr'}\sin f = \sqrt{ap}\sin g ;$$

avem deci

$$(25) \qquad \sqrt{p} = \frac{\sqrt{rr'}\sin f}{\sqrt{a}\sin g}$$

Se poate demonstra simplu ([1], p.77, 78) că y reprezintă raportul ariei sectorului eliptic faţă de aria triunghiului, relative la Soare şi cele două poziţii ale astrului.

Expresiile lui r şi r' funcţie de v şi v' se scriu

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos v \qquad ; \qquad \frac{p}{r'} = 1 + e\cos v'$$

Avem deja $\frac{v'-v}{2} = f$; punem $\frac{v'+v}{2} = F$ şi adunînd şi scăzînd cele două expresii precedente, rezultă

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{p}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - 1 = e\cos f\cos F \\ \frac{p}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = e\sin f\sin F \end{cases}$$

Introducînd unghiul ψ prin

$\sqrt{\frac{r'}{r}} = \operatorname{tg}\psi$, avem

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = \frac{1}{2\sqrt{rr'}}(\operatorname{tg}\psi - \operatorname{cotg}\psi) = -\frac{1}{\sqrt{rr'}}\operatorname{cotg}2\psi$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) = \frac{1}{2\sqrt{rr'}}(\operatorname{tg}\psi + \operatorname{cotg}\psi) = \frac{1}{\sqrt{rr'}\sin 2\psi}$$

de unde, ţinînd cont de variabilele h şi H date de

$$(27) \quad \begin{cases} \sin h\cos H = \sin f \\ \sin h\sin H = \cos f\cos 2\psi \\ \cos h = \cos f\sin 2\psi \end{cases}$$

rezultă, cu (26)

$$e\sin F = -\frac{p}{\sqrt{rr'}\cos h}\operatorname{tg} H$$

$$e\cos F = \frac{p}{\sqrt{rr'}\cos h} - \frac{1}{\cos f}$$

Datorăm încă lui Gauss un sistem de formule simetrice care permit calculul simultan al cantităţilor a, e, F şi G. Dacă, în (6) se pune $e = \sin\varphi$, remarcînd că

$$\sqrt{1\pm e} = \cos\frac{\varphi}{2} \pm \sin\frac{\varphi}{2} ,$$

obținem

$$(28)\quad \begin{cases} \sqrt{r}\sin\frac{v}{2} = \sqrt{a}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\frac{E}{2} \\ \sqrt{r}\cos\frac{v}{2} = \sqrt{a}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{E}{2} \\ \sqrt{r'}\sin\frac{v'}{2} = \sqrt{a}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\frac{E'}{2} \\ \sqrt{r'}\cos\frac{v'}{2} = \sqrt{a}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{E'}{2} \end{cases}$$

Introducem încă următoarele cantități :

$$v \doteq F-f \;;\; v' = F+f \;;\; E = G-g \;;\; E' = G+g$$

Să înmulțim prima ecuație (28) prin $\sin\frac{F+g}{2}$, a doua prin $\cos\frac{F+g}{2}$, a treia prin $-\sin\frac{F-g}{2}$, a patra prin $-\cos\frac{F-g}{2}$ și să adunăm; rezultă, în primul membru,

$$\sqrt{r}\cos\frac{g+f}{2} - \sqrt{r'}\cos\frac{-g-f}{2} = (\sqrt{r} - \sqrt{r'})\cos\frac{f+g}{2}$$

iar în membrul secund, coeficientul lui $\sqrt{a}\cos\frac{\varphi}{2}$ este

$$\cos\frac{F-G+2g}{2} - \cos\frac{F-G-2g}{2} = -2\sin g\sin\frac{F-G}{2}$$

iar cel al lui $\sqrt{a}\sin\frac{\varphi}{2}$

$$-\cos\frac{F+G}{2} + \cos\frac{F+G}{2} = 0 \;;$$

deci avem

$$(29)\quad (\sqrt{r'} - \sqrt{r})\cos\frac{f+g}{2} = 2\sqrt{a}\sin g\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{F-G}{2} \;;$$

Se aplică încă de trei ori înmulțirile de ecuații (28) cu factorii

$$\left(\cos\frac{F+g}{2},\; -\sin\frac{F+g}{2},\; -\cos\frac{F-g}{2},\; \sin\frac{F-g}{2}\right)$$
$$\left(-\sin\frac{F-g}{2},\; -\cos\frac{F-g}{2},\; \sin\frac{F+g}{2},\; \cos\frac{F+g}{2}\right)$$
$$\left(-\cos\frac{F-g}{2},\; \sin\frac{F-g}{2},\; \cos\frac{F+g}{2},\; -\sin\frac{F+g}{2}\right)$$

și se obțin alte trei relații asemănătoare cu (29), prima și a treia avînd combinația $(\sqrt{r'} + \sqrt{r})$ în loc de $(\sqrt{r'} - \sqrt{r})$ în primul membru.

Folosim acum unghiul χ prin (15) și rezultă

$$\sqrt{r'} - \sqrt{r} = \sqrt[4]{rr'}\left(\sqrt[4]{\frac{r'}{r}} - \sqrt[4]{\frac{r}{r'}}\right) =$$
$$= \sqrt[4]{rr'}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\chi\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}+\chi\right)\right] = 2\sqrt[4]{rr'}\operatorname{tg}2\chi$$

și $$\sqrt{r'} + \sqrt{r} = \sqrt[4]{rr'}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\chi\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}+\chi\right)\right] = 2\sqrt[4]{rr'}\sec 2\chi$$

Se obține din (29) și celelalte trei :

$$(30)\quad \begin{cases} \sqrt{a}\sin g\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{F-G}{2} = \sqrt[4]{rr'}\cos\frac{f+g}{2}\,\mathrm{tg}\,2\chi \\ \sqrt{a}\sin g\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{F-G}{2} = \sqrt[4]{rr'}\sin\frac{f+g}{2}\sec 2\chi \\ \sqrt{a}\sin g\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{F+G}{2} = \sqrt[4]{rr'}\cos\frac{f-g}{2}\,\mathrm{tg}\,2\chi \\ \sqrt{a}\sin g\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{F+G}{2} = \sqrt[4]{rr'}\sin\frac{f-g}{2}\sec 2\chi \end{cases}$$

3.4. ELEMENTELE ORBITEI PARABOLICE ÎN PLANUL EI

Din (17')1.5. şi $p=2q$, rezultă imediat

$$\sqrt{r}\cdot\cos\frac{v}{2} = \sqrt{q}\ ,\qquad \sqrt{r'}\cos\frac{v'}{2} = \sqrt{q}$$

şi cum $2f = v'-v$, a doua ecuaţie se poate scrie

$$\sqrt{q} = \sqrt{r'}\cos\left(f+\frac{v}{2}\right) = \sqrt{r'}\cos\frac{v}{2}\cos f - \sqrt{r'}\sin\frac{v}{2}\sin f$$

şi colaborînd cu prima ecuaţie, implică $\sin\frac{v}{2}$.

Pentru determinarea lui q şi v, avem sistemul

$$(31)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{q}}\cos\frac{v}{2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \\ &\frac{1}{\sqrt{q}}\sin\frac{v}{2} = \frac{1}{\sqrt{r}}\,\mathrm{cotg}\,f - \frac{1}{\sqrt{r'}}\,\mathrm{cosec}\,f \end{aligned}$$

apoi se calculează ω şi T prin (18)1.5.

3.5. ELEMENTELE ORBITEI HIPERBOLICE

Să notăm prin $\frac{c}{\gamma}$ şi $c\gamma$ valorile necunoscutelor auxiliare α din 1.6. relative la momentele t şi t', adică să punem(1.6.,(23'))

$$\mathrm{tg}\,\frac{v}{2} = \frac{\frac{c}{\gamma}-1}{\frac{c}{\gamma}+1}\ ;\quad \mathrm{tg}\,\frac{v'}{2} = \frac{c\gamma-1}{c\gamma+1}\ ;\quad v'>v\ ,\ \gamma>1$$

Avem, cu (24')1.6.:

$$(32)\quad \begin{cases} \sqrt{r}\cos\frac{v}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a_1(e-1)}\left(\sqrt{\frac{c}{\gamma}}+\sqrt{\frac{\gamma}{c}}\right) \\ \sqrt{r}\sin\frac{v}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a_1(1+e)}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{c}}-\sqrt{\frac{c}{\gamma}}\right) \\ \sqrt{r'}\cos\frac{v'}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a_1(e-1)}\left(\sqrt{c\gamma}+\sqrt{\frac{1}{c\gamma}}\right) \\ \sqrt{r'}\sin\frac{v'}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a_1(1+e)}\left(\sqrt{\frac{1}{c\gamma}}-\sqrt{c\gamma}\right) \end{cases}$$

Cu $f=\frac{v'-v}{2}$, formăm combinaţia $\sqrt{rr'}\cos f$ şi rezultă după transformări simple,

$$(33)\quad 2\sqrt{rr'}\cos f = a_1 e\left(c+\frac{1}{c}\right) - a_1\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)$$

Pe de altă parte, din (24°)1.6.,

$$r = \frac{a_1 e}{2}\left(\frac{c}{\gamma}+\frac{\gamma}{c}\right) - a_1\ ;\quad r' = \frac{a_1 e}{2}\left(c\gamma+\frac{1}{c\gamma}\right) - a_1$$

de unde

(33') $\quad r + r' = \frac{a_1 e}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right)\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) - 2a_1$

Tot din 1.6.,(24),avem

$$\frac{k(t-T)}{a_1^{3/2}} = \frac{e}{2}\left(\frac{c}{\gamma} - \frac{\gamma}{c}\right) - \ln\frac{c}{\gamma}$$

$$\frac{k(t'-T)}{a_1^{3/2}} = \frac{e}{2}\left(c\gamma - \frac{1}{c\gamma}\right) - \ln c\gamma$$

de unde,prin scădere,şi punînd $\theta \doteq k(t'-t)$,

(34) $\quad \frac{\theta}{a_1^{3/2}} = \frac{e}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right)\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) - 2\ln\gamma$

Se scot,din (33)şi(33')

(35) $$\begin{cases} e\left(c + \frac{1}{c}\right) = \left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) + \frac{2\sqrt{rr'}}{a_1}\cos f \\ a_1\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)^2 = 2(r+r') - 2\sqrt{rr'}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)\cos f \end{cases}$$

care duse în (34) implică

(36) $\quad \frac{\theta}{a_1^{3/2}} = \left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{\sqrt{rr'}}{a_1}\cos f + \frac{1}{2}\left(\gamma^2 - \frac{1}{\gamma^2}\right) - 2\ln\gamma$

Punînd,ca în cazul mişcării eliptice

(37) $\quad 1 + 2\ell \doteq \frac{r + r'}{2\sqrt{rr'}\cos f}$

apoi

(38) $\quad \left(\sqrt{\gamma} - \sqrt{\frac{1}{\gamma}}\right)^2 \doteq 4z$

ultima (35) devine

(39) $\quad a_1\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)^2 = 8\sqrt{rr'}\,(\ell - z)\cos f$

Făcînd din nou

(40) $\quad m \doteq \frac{\theta}{(2\sqrt{rr'}\cos f)^{3/2}}$,

ecuaţiile (39) şi (36) dau

(41) $\quad m = (\ell - z)^{1/2} + (\ell - z)^{3/2}\cdot Z$

cu

(42) $\quad Z \doteq \frac{\gamma^2 - \frac{1}{\gamma^2} - 4\ln\gamma}{\frac{1}{4}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)^3}$

şi cum γ din (38) este $\gamma > 1$,avem,după efectuarea calculelor:

$$Z = \frac{(1+2z)\sqrt{z+z^2} - \ln\left(\sqrt{1+z} + \sqrt{z}\right)}{2(z+z^2)^{3/2}}$$

Se deduce

$$2(z+z^2)^{3/2}\frac{dZ}{dz} + 3Z(1+2z)\sqrt{z+z^2} =$$

$$= 2\sqrt{z+z^2} + \frac{(1+2z)^2}{2\sqrt{z+z^2}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{z}} + \frac{1}{2\sqrt{1+z}}}{\sqrt{1+z} + \sqrt{z}} =$$

$$= 2\sqrt{z+z^2} + \frac{4(z+z^2)}{2\sqrt{z+z^2}} = 4\sqrt{z+z^2}$$

Avem deci ecuaţia diferenţială

$$2(z+z^2)\frac{dZ}{dz} = 4-(3+6z)Z$$

care este analoagă cu cazul eliptic, schimbînd $X \to Z$ şi $x \to -z$.

Punem deci, ca şi în cazul eliptic,

(43) $$Z = \frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{9}{10}(z+\zeta)}$$

(44) $$\ell - z \doteq \frac{m^2}{y^2}$$

şi ecuaţia în y devine

(45) $$y^3 - y^2 - hy - \frac{h}{9} = 0$$

Punem

$$h = \frac{m^2}{\frac{5}{6}+\ell+\zeta}$$

şi aplicăm metoda de aproximaţii succesive, luînd iniţial $\zeta=0$; vom avea γ prin (38):

(46) $$\gamma = 1+2z+2\sqrt{z+z^2}$$

şi punem

$$\operatorname{tg} 2n \doteq 2\sqrt{z+z^2},$$

de unde

$$1+\operatorname{tg}^2 2n = (1+2z)^2$$

Din (46) rezultă

$$\gamma = \operatorname{tg} 2n + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2n} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+n\right)$$

şi rezultă a_1 prin (39).

Pentru p, formăm, ca pentru elipsă, produsul

$$2\sqrt{rr'}\sin\frac{v'-v}{2} = 2\sqrt{rr'}\sin f = \sqrt{a_1^2(e-1)}\left(\gamma-\frac{1}{\gamma}\right) =$$
$$= \sqrt{a_1 p}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)$$

de unde rezultă

(47) $$\sqrt{p} = \frac{2\sqrt{rr'}\sin f}{\sqrt{a_1}\left(\gamma-\frac{1}{\gamma}\right)}$$

Se poate demonstra încă ([1], p.90) că y rămîne raportul sectorului hiperbolic la triunghiul înscris.

Analog cu formula (24'), se găseşte acum

(48) $$a_1 = \frac{\theta^2}{4y^2 rr'\cos^2 f\operatorname{tg}^2 2n}$$

şi

$$(49)\qquad \sqrt{e-1} = \sqrt{\frac{p}{a_1}} = \frac{y^2}{2m^2}\,\mathrm{tg}\,f\ \mathrm{tg}\,2n$$

Valorile pentru N şi N' sînt date din (19)1.6. iar pentru T, adunăm ecuaţiile care leagă epocile t şi t' de N şi N' (23)1.6.:

$$\frac{t+t'}{2} - T = \frac{a_1^{3/2}}{k}\left[\frac{e}{2}\left(\mathrm{tg}\,N + \mathrm{tg}\,N'\right) - \frac{1}{2}\ln \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{N}{2}\right)\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{N'}{2}\right)\right]$$