-CAPITOLUL V-

AMELIORAREA ELEMENTELOR UNEI ORBITE APROXIMATIVE

Reprezintă "îmbunătăţirea" valorilor elementelor orbitale calculate după puţine observaţii,astfel încît traiectoria prezisă să se apropie cît mai bine de cea reală.

5.1. METODA VARIATIEI DISTANŢELOR GEOCENTRICE

Avînd determinete elementele unei prime orbite cu ajutorul poziţiilor heliocentrice extreme,adică cu ajutorul datelor $\lambda_1, \beta_1, \lambda_3, \beta_3$ la epocile t_1 şi t_3 şi al distanţelor geocentrice ρ_1 şi ρ_3 deduse din calcul,se formează o efemeridă a astrului.

Să presupunem că în locul coordonatelor observate la epoca t, λ şi β ,efemerida dă λ' şi β' .Se admite că diferenţele între poziţiile observate şi cele calculate provin numai din faptul că distanţele geocentrice ρ_1 şi ρ_3 sînt inexacte;dacă facem pe ρ_1 şi ρ_3 să varieze cu cantităţile $\delta\rho_1$ şi $\delta\rho_3$ destul de mici a.i.pătratele lor şi produsele lor să fie neglijabile,avem:

$$(1)\quad \begin{cases} \delta\lambda' = \dfrac{\partial\lambda'}{\partial\rho_1}\cdot\delta\rho_1 + \dfrac{\partial\lambda'}{\partial\rho_3}\cdot\delta\rho_3, \\ \delta\beta' = \dfrac{\partial\beta'}{\partial\rho_1}\cdot\delta\rho_1 + \dfrac{\partial\beta'}{\partial\rho_3}\cdot\delta\rho_3 \end{cases}$$

Cunoscînd $\delta\lambda'$, $\delta\beta'$ din observaţii,putem rezolva acest sistem în $\delta\rho_1$ şi $\delta\rho_3$ dacă cunoaştem $\dfrac{\partial\lambda'}{\partial\rho_1}, \ldots$.În loc de a se determina analitic aceşti coeficienţi,se foloseşte artificiul următor:

Se calculează mai întîi elementele,apoi coordonatele sferice geocentrice,plecînd de la 3 sisteme de valori ale distanţelor geocentrice:

1. ρ_1 şi ρ_3 conduc,pentru epoca t,la coordonatele λ' şi β';
2. $\rho_1+\varepsilon_1$ şi ρ_3 dau,pentru aceeaşi epocă, λ'' şi β'';
3. ρ_1 şi $\rho_3+\varepsilon_3$ dau λ''' şi β''';

Dacă pătratele variaţiilor sînt neglijabile,dezvotînd în serie,

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda''-\lambda' = \dfrac{\partial\lambda'}{\partial\rho_1}\varepsilon_1 , & \beta''-\beta' = \dfrac{\partial\beta'}{\partial\rho_1}\varepsilon_1 , \\ \lambda'''-\lambda' = \dfrac{\partial\lambda'}{\partial\rho_3}\varepsilon_3 , & \beta'''-\beta' = \dfrac{\partial\beta'}{\partial\rho_3}\varepsilon_3 \end{cases}$$

unde s-au notat prin ε_1 şi ε_3 variaţiile $\delta\rho_1$ respectiv $\delta\rho_3$.

Mai departe, dacă se înlocuieşte ρ_1 prin $\rho_1+\delta\rho_1$ şi ρ_3 prin $\rho_3+\delta\rho_3$, calculul furnizează exact coordonatele observate λ şi β, deci scoţînd din (2) $\frac{\partial\lambda'}{\partial\rho_1}, \ldots$ şi înlocuind în (1), trebuie ca

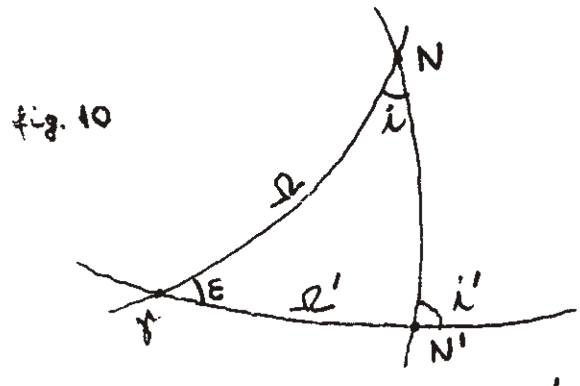
$$(3)\quad \begin{cases} \lambda-\lambda' = (\lambda''-\lambda')\dfrac{\delta\rho_1}{\varepsilon_1} + (\lambda'''-\lambda')\dfrac{\delta\rho_3}{\varepsilon_3} \\ \beta-\beta' = (\beta''-\beta')\dfrac{\delta\rho_1}{\varepsilon_1} + (\beta'''-\beta')\dfrac{\delta\rho_3}{\varepsilon_3} \end{cases}$$

Aceste două ecuaţii determină $\delta\rho_1$ şi $\delta\rho_3$ cu care se pot corecta expresiile lui ρ_1 şi ρ_3 găsite în cap.IV.

5.2. METODA VARIAŢIEI ELEMENTELOR

Principiul ei constă în a face să varieze simultan cele 6 elemente ale orbitei, presupunînd mereu variaţiile destul de mici, a.i., în dezvoltările care rezultă pentru coordonate, să putem neglija pătratele acestor variaţii.

Vom raporta planul orbitei la ecuatorul mijlociu al unei epoci cunoscute; această schimbare nu modifică nici elementele a şi e, nici epoca T a trecerii la periheliu; pentru a trece elementele Ω, i, ω raportate la ecliptică în elementele Ω', i', ω' raportate la ecuator, considerăm triunghiul $\gamma N'N$ (figura 10) în care γN este ecliptica, N'N cercul mare care reprezintă planul orbitei, $\gamma N'$ ecuatorul.



Notînd prin σ arcul NN', avem

$$u' = u + \sigma$$

Formulele lui Delambre ([6] p.17) permit obţinerea lui i', Ω' şi σ:

$$(4)\quad \begin{aligned} \cos\frac{i'}{2}\sin\frac{\Omega'+\sigma}{2} &= \cos\frac{i-\varepsilon}{2}\sin\frac{\Omega}{2} \\ \cos\frac{i'}{2}\cos\frac{\Omega'+\sigma}{2} &= \cos\frac{i+\varepsilon}{2}\cos\frac{\Omega}{2} \\ \sin\frac{i'}{2}\sin\frac{\Omega'-\sigma}{2} &= \sin\frac{i-\varepsilon}{2}\sin\frac{\Omega}{2} \\ \sin\frac{i'}{2}\cos\frac{\Omega'-\sigma}{2} &= \sin\frac{i+\varepsilon}{2}\cos\frac{\Omega}{2} \end{aligned}$$

Pentru a nu modifica notaţiile, să desemnăm în continuare prin Ω, i, ω aceste noi elemente Ω', i', ω'.

Fie notaţiile obişnuite

x,y,z coordonate heliocentrice ale planetei;

X,Y,Z cele ale Pămîntului;

α, δ coordonatele ecuatoriale geocentrice ale astrului.

Avem

$$(5)\quad \begin{cases} x=\rho\cos\delta\cos\alpha+X \quad , \quad y=\rho\cos\delta\sin\alpha+Y \\ z=\rho\sin\delta+Z \end{cases}$$

Dacă atribuim elementelor a,e,... variaţiile da,de,...,coordonatele x,y,z vor varia la rîndul lor cu dx,dy,dz;asemănător,coordonatele polare geocentrice $d\rho, d\alpha, d\delta$;numai cantităţile X,Y,Z rămînînd invariabile;vom avea deci

$$(6)\quad \begin{cases} dx=\cos\delta\cos\alpha\cdot d\rho-\rho\cos\delta\sin\alpha\cdot d\alpha-\rho\sin\delta\cos\alpha\cdot d\delta, \\ dy=\cos\delta\sin\alpha\cdot d\rho+\rho\cos\delta\cos\alpha\cdot d\alpha-\rho\sin\delta\sin\alpha\cdot d\delta, \\ dz=\sin\delta\cdot d\rho+\rho\cos\delta\cdot d\delta \end{cases}$$

Formînd combinaţiile care urmează în membrul stîng,deducem:

$$(7)\quad \begin{cases} \cos\alpha\cdot dy-\sin\alpha\cdot dx=\rho\cos\delta\cdot d\alpha \\ -\cos\alpha\sin\delta\cdot dx-\sin\alpha\sin\delta\cdot dy+\cos\delta\cdot dz=\rho\, d\delta \end{cases}$$

Membrii secunzi ai ecuaţiilor (7)sînt proiecţiile deplasării aparente a astrului(cînd elementele variază)pe planul perpendicular razei vizuale ρ ,prima proiecţie fiind făcută în plan pe o paralelă la ecuator,a doua după o direcţie perpendiculară primeia.

Trebuie să calculăm acum dx,dy,dz în funcţie de variaţia elementelor;avem,de exemplu :

$$(8)\quad \begin{cases} dx=\frac{\partial x}{\partial a}\cdot da+\frac{\partial x}{\partial e}\cdot de+\frac{\partial x}{\partial T}\cdot dT+\frac{\partial x}{\partial \Omega}\cdot d\Omega+ \\ \qquad +\frac{\partial x}{\partial i}\cdot di+\frac{\partial x}{\partial \omega}\cdot d\omega \end{cases}$$

iar coordonatele x,y,z sînt date de (1)2.2.în funcţie de elementele r,v,ω ,Ω,i.

Să analizăm aceste elemente: r şi v sînt coordonatele polare în planul orbitei pentru care origine a unghiurilor este direcţia periheliului;prin urmare,r şi v nu depind de a,e,T,elementele fixînd mărimea orbitei şi epoca iniţială;celelalte elemente Ω, i şi ω determină poziţia planului orbitei şi orientarea direcţiei periheliului în acest plan;ele nu intră,în expresiile (1)2.2.ale lui x,y,z , decît sub formă explicită,în vreme ce a,e,T nu figurează decît prin intermediul lui r şi al lui v.

Ne vom ocupa acum de derivatele parţiale din (8):deducem cu uşurinţă din primele două (1)2.2.

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -y \ , \quad \frac{\partial y}{\partial \Omega} = x \ , \quad \frac{\partial z}{\partial \Omega} = 0$$

Rezultă atunci,folosind (7),

$$\rho \cos\delta \frac{\partial \alpha}{\partial \Omega} = x\cos\alpha + y\sin\alpha =$$
$$= r\cos(\omega+v)\cos(\alpha-\Omega) + r\cos i \sin(\omega+v)\sin(\alpha-\Omega)$$

şi punînd

$$\cos(\alpha-\Omega) \doteq m\cos M \ , \quad \cos i\sin(\alpha-\Omega) \doteq m\sin M$$

avem

$$(9) \quad \rho\cos\delta \frac{\partial\alpha}{\partial\Omega} = mr\cos(\omega+v-M)$$

Analog,

$$\rho \frac{\partial\delta}{\partial\Omega} = \sin\delta\,(y\cos\alpha - x\sin\alpha) =$$
$$= \sin\delta\left[-r\cos(\omega+v)\sin(\alpha-\Omega) + r\cos i\sin(\omega+v)\cos(\alpha-\Omega)\right]$$

şi punînd

$$\sin(\alpha-\Omega) \doteq n\sin N \ , \quad \cos i\cos(\alpha-\Omega) \doteq n\cos N$$

rezultă

$$(10) \quad \rho\frac{\partial\delta}{\partial\Omega} = nr\sin\delta\sin(\omega+v-N)$$

Avem,diferenţiind după i :

$$(11) \quad \rho\cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial i} = -r\sin i\sin(\omega+v)\cos(\alpha-\Omega)\ ;$$

$$(12) \quad \rho\frac{\partial\delta}{\partial i} = fr\sin(\omega+v)\cos(F-i)$$

unde s-a pus

$$(13) \quad \cos\delta \doteq f\cos F \ , \quad \sin\delta\sin(\alpha-\Omega) \doteq f\sin F$$

Calculul derivatelor parţiale în raport cu ω implică

$$(14) \quad \rho\cos\delta\frac{\partial\alpha}{\partial\omega} = mr\cos(\omega+v-N)\ ,$$

$$(15) \quad \rho\frac{\partial\delta}{\partial\omega} = gr\sin(\omega+v-G)$$

unde s-a pus în ultimul loc

$$(16) \quad \begin{cases} g\sin G \doteq \sin\delta\cos i\sin(\alpha-\Omega) - \sin i\cos\delta\ , \\ g\cos G \doteq \sin\delta\cos(\alpha-\Omega) \end{cases}$$

Căutăm apoi derivatele parţiale ale lui r şi v în raport cu a,e, T, presupunînd aici orbita eliptică; formulele principale ale mișcării erau, din 1.3.:

$$(17)\quad \begin{cases} E - e \sin E = \dfrac{k}{a^{3/2}}(t-T) \\ r = a(1-e\cos E) \\ a\sin E = \dfrac{r\sin v}{\sqrt{1-e^2}}\ ,\quad a\cos E = ae + r\cos v \end{cases}$$

Dacă o diferențiem pe prima și ținem seama de următoarele, găsim

$$\frac{\partial E}{\partial T} = -\frac{k}{r\sqrt{a}}\ ,\quad \frac{\partial E}{\partial a} = -\frac{3}{2}\,\frac{k}{r a^{3/2}}(t-T)\ ,\quad \frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\sin v}{\sqrt{1-e^2}}$$

A doua relație dă atunci

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial T} = \dfrac{-ke\sin v}{\sqrt{a(1-e^2)}} \\ \dfrac{\partial r}{\partial a} = \dfrac{r}{a} - \dfrac{3}{2}\,\dfrac{ke\sin v}{a^{3/2}\sqrt{1-e^2}}(t-T) \\ \dfrac{\partial r}{\partial e} = -a\cos v \end{cases}$$

Folosind relația

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\frac{E}{2}\ ,$$

rezultă

$$\ln\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \frac{1}{2}\ln(1+e) - \frac{1}{2}\ln(1-e) + \ln\operatorname{tg}\frac{E}{2}$$

și luînd derivatele parțiale ale celor doi membrii, avem

$$\frac{1}{\sin v}\cdot\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{1}{\sin E}\cdot\frac{\partial E}{\partial T}\ ,$$

$$\frac{1}{\sin v}\cdot\frac{\partial v}{\partial a} = \frac{1}{\sin E}\cdot\frac{\partial E}{\partial a}\ ,$$

$$\frac{1}{\sin v}\cdot\frac{\partial v}{\partial e} = \frac{1}{1-e^2} + \frac{1}{\sin E}\cdot\frac{\partial E}{\partial e}$$

Se obțin atunci, din ultimele trei relații

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial T} = -\dfrac{k\sqrt{a(1-e^2)}}{r^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial a} = -\dfrac{3}{2}\,\dfrac{k\sqrt{1-e^2}}{r^2\sqrt{a}}(t-T) \\ \dfrac{\partial v}{\partial e} = \sin v\left(\dfrac{1}{1-e^2} + \dfrac{a}{r}\right) \end{cases}$$

Formulele (18) și (19) dau derivatele parțiale ale lui r și v în raport cu T, a și e. Avem apoi, unde η desemnează oricare din aceste 3 elemente,

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

Dacă punem

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} \div h_\eta \cos H_\eta\ ,\quad r\frac{\partial v}{\partial \eta} \div h_\eta \sin H_\eta$$

avem, după prima (1)2.2.

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = h_\eta \cos H_\eta \left[\cos(\omega+v)\cos\Omega - \sin(\omega+v)\sin\Omega\cos i\right] +$$
$$+ h_\eta \sin H_\eta \left[\sin(\omega+v)\cos\Omega - \cos(\omega+v)\sin\Omega\cos i\right] =$$
$$= h_\eta \left[\cos(\omega+v+H_\eta)\cos\Omega - \sin(\omega+v+H_\eta)\sin\Omega\cos i\right]$$

Pentru calculul lui $\frac{\partial x}{\partial \eta}$ este suficient să înlocuim deci în (1) 2.2. r prin h_η şi $\omega+v$ prin $\omega+v+H_\eta$; analog pentru coordonatele y şi z.

Găsim atunci cu uşurinţă, repetînd calculul efectuat pentru derivatele parţiale în raport cu ω,

$$\rho \cos\delta \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} = h_\eta \cdot n \sin(\omega+v+H_\eta - N),$$
$$\rho \frac{\partial \delta}{\partial \eta} = h_\eta \cdot g \cos(\omega+v+H_\eta - G)$$

5.3. METODĂ STATISTICĂ

Să presupunem că avem efectuate observaţii ale astrului la momentele $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ şi vom aplica pentru calculul orbitei, de exemplu, metoda Gauss.

Corespunzător la cîte trei din observaţii, (t_1, t_2, t_3), (t_2, t_3, t_4) şamd, se calculează elementele orbitei; vom avea deci un număr de n-2 seturi de elemente în ordinea naturală a observaţiilor sau C_n^3 în număr maxim.

Conform cu rezultatele din teoria statisticii, dispersia acestor valori-probă se va face în jurul valorilor reale ale elementelor, care se vor calcula deci făcînd media aritmetică a elementelor corespunzătoare.